

テニス・ボールの飛行軌跡

ラケットでボールを打った後、ボールはどのような軌跡を描いて飛んでいくか興味がありませんか？打ってみれば分かる。それはそうですけど、条件を変えるとどうなるか知るのも面白いかもしれませんよ。

実際には、ラケットのスイング速度・方向、ラケット面の角度、ガットの反発係数、相手が打ったボールの速度・回転・飛行方向など多くの要素があって、厳密な計算はとても手に負えません。と言うことは、実際にラケットでボールを打つことはそう簡単ではないということですね。ほんとうにそう思います。簡単に理想的なヒットができれば、こんなに長くテニスをやっていなかったでしょうね。難しく、奥が深いから病み付きになるのですよね。

「テニスの力学 - 1」で考察したように、ボールの回転（スピン）による揚力と、空気抵抗による抗力を考慮した計算を行ってみます。

でも、問題を少し簡単にして、ある高さで、ある方向に、ある初速で、ある回転がかかったボールが飛び出した場合の軌跡を求めることにします。（これならできそうだ）ただし、回転は相手コートにバウンドするまで変わらないものとしします。

1. 運動方程式

図 1 のように、打ち出された後のボールには、飛行方向と反対向きに抗力（空気抵抗）、飛行方向と直角方向に揚力、y 軸の負の方向に重力が作用します。したがって、x 軸および y 軸に関する運動方程式は次式のようになります。 \ddot{x} 、 \ddot{y} はボールの位置 x 、 y を時間で 2 回微分（加速度）したことを表しています。

$$m\ddot{x} = -F_d \cos \theta - F_L \sin \theta \quad (x \text{ 軸方向の運動方程式}) \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -F_w - F_d \sin \theta + F_L \cos \theta \quad (y \text{ 軸方向の運動方程式}) \quad (2)$$

ここで、 m ：ボールの質量、 F_w ：重力、 F_d ：抗力（空気抵抗）、 F_L ：揚力、 θ ：飛行方向がコート面となす角度です。

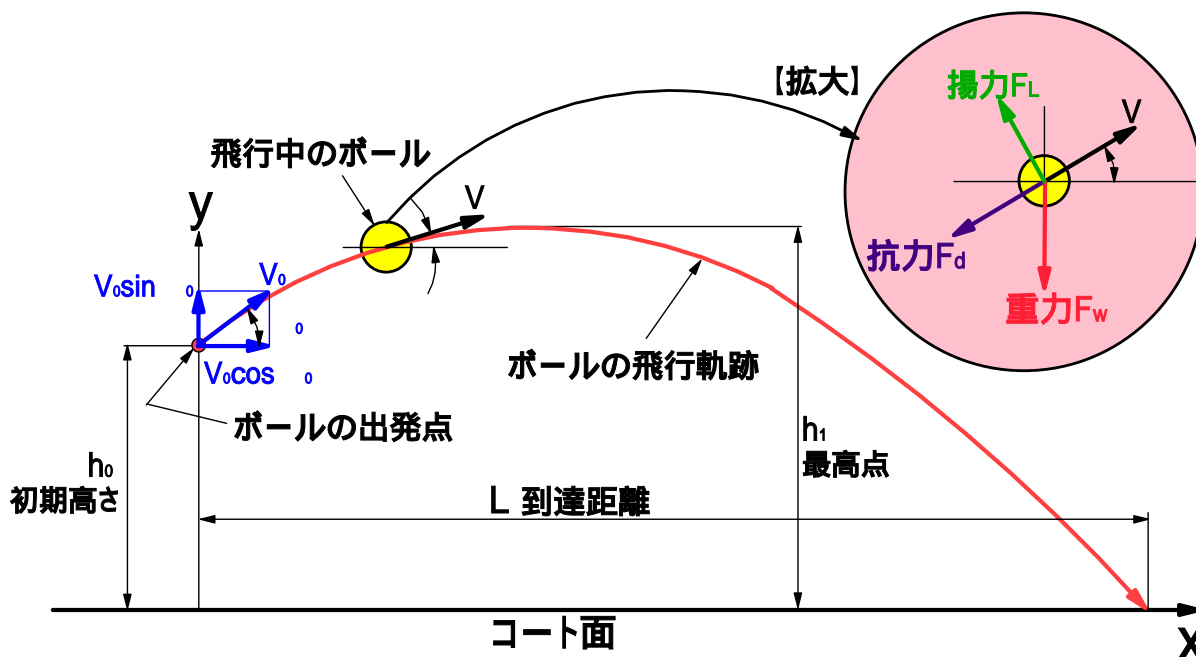


図 1 ボールの軌跡

「テニスの力学 - 1」で見たように、重力、抗力、揚力は次の式で表すことができます。

$$F_w = mg \quad (\text{重力}) \quad (3)$$

ここで、 g ：重力の加速度です。

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho V^2 A \quad (\text{抗力}) \quad (4)$$

ここで、 C_d ：抗力係数（空気抵抗係数）、 ρ ：空気密度、 V ：ボールの速度、 A ：前面投影面積です。

$$F_L = \frac{1}{8} \pi^2 \rho d^3 V N \quad (\text{揚力}) \quad (5)$$

ここで、 d ：ボールの直径、 N ：ボールの回転速度です。なお、ボールの回転速度は揚力の方向を考えて、バックスピンの場合は正、トップスピンの場合は負と考えます。

式(3)、(4)、(5)を式(1)、(2)に代入して次の式が得られます。

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2} C_d \rho V^2 A \cos \theta - \frac{1}{8} \pi^2 \rho d^3 V N \sin \theta \quad (x \text{軸方向の運動方程式}) \quad (6)$$

$$m\ddot{y} = -mg - \frac{1}{2} C_d \rho V^2 A \sin \theta + \frac{1}{8} \pi^2 \rho d^3 V N \cos \theta \quad (y \text{軸方向の運動方程式}) \quad (7)$$

速度の x 成分を V_x 、 y 成分を V_y とすると次のように表すことができます。

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (8)$$

$$\dot{x} = V_x = V \cos \theta \quad (9)$$

$$\dot{y} = V_y = V \sin \theta \quad (10)$$

式(8)、式(9)および式(10)を式(6)および式(7)に代入して整理すると次の式が得られます。

$$\dot{V}_x = -\frac{C_d \rho A}{2m} V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2} - \frac{\pi^2 \rho d^3 N}{8m} V_y \quad (x \text{軸方向の運動方程式}) \quad (11)$$

$$\dot{V}_y = -g - \frac{C_d \rho A}{2m} V_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2} + \frac{\pi^2 \rho d^3 N}{8m} V_x \quad (y \text{軸方向の運動方程式}) \quad (12)$$

2. 運動方程式を解く

式(11)と式(12)の連立微分方程式を解くことでボールの飛行軌跡を知ることができます。でもこの連立微分方程式を紙と鉛筆で【解析的に】解くことはできません。(できないと思います)

でも、諦めることはないですよ。そんなときには数値解析という強い味方がいます。微小な区間であれば変化を直線で近似できるということを基本に、細かく区切ってシコシコ繰り返し計算するのです。こういうことはコンピュータが得意なのです。昔は原理は分かっても手計算でシコシコなんてやってられなかったのですが、現在ではPCの発展で簡単にできるようになりましたね。

ここでは、4次のルンゲ・クッタ法 (*Runge-Kutta Method*: Appendix-1 に簡単な手順を示しておきました) という手順で連立微分方程式を解きます。

微分方程式を解くに当たって次のことを仮定しておきましょう。

- ・ 抗力係数 C_d はボールの速度，表面状態，レイノルズ数に依存せず一定である。
- ・ ボールの回転（スピン）は飛行方向かその反対方向とする。（サイド・スピンは考えない）
- ・ ボールの回転速度（スピン）は相手コートにバウンドするまで一定である。

実際には、表計算ツールである Microsoft Excel のマクロを使って四次のルンゲ・クッタ法の計算手順を組んで計算を行いました。

3. 実際の問題についての試算

では、実際の問題について試算を行ってみましょう。

3.1 計算準備

- ・ ルールブック第二部・規則 3・(b)の規定からボールの質量は 56.0 g ~ 59.4 g となっていますので、中央の値をとって $m = 5.89 \times 10^{-5} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ (57.7 g) とします。
- ・ g は重力の加速度ですから $g = 980 \text{ cm} / \text{s}^2$ です。
- ・ ルールブックの第二部・付則 1・(4)からボールの直径は 6.541 cm ~ 6.858 cm 【BT1 (Fast), BT2 (Medium) の場合】ですから、中央の値を使ってボールの直径は $d = 6.7 \text{ cm}$ です。
- ・ したがって、前面投影面積は $A = \frac{\pi}{4} \times 6.7^2 = 35.26 \text{ cm}^2$ となります。
- ・ 空気の密度は理科年表から、大気圧下で 25 のときに $\rho = 1.208 \times 10^{-9} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}^4$ です。
- ・ 空気の粘度は理科年表から、大気圧下で 25 のときに $\nu = 1.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$ です。また、以下のようにボールの初速度を $V_0 = 15, 25, 35 \text{ m/s}$ とすると、レイノルズ数は
$$R_e = \frac{d \cdot V}{\nu} = \frac{0.067 \times 15}{1.56 \times 10^{-5}} \sim \frac{0.067 \times 35}{1.56 \times 10^{-5}} = 6.4 \times 10^4 \sim 1.5 \times 10^5$$
 となり、参考文献 1 によると、物体が球（実は滑らかな球）でこの範囲のレイノルズ数であれば、抵抗係数は $C_d = 0.5$ です。実際には速度が落ちてきてレイノルズ数が小さくなると抵抗係数は大きくなりますが、ここでは一定として計算します。
- ・ ボールのスピンですが、どのくらいなのでしょう。参考文献 2 によると、普通のプレーヤーで毎秒 20 ~ 30 回転、プロで毎秒 50 回転以上となっています。ここでは、フラットからプロの強烈なスピンまで $N = 0, \pm 15, \pm 30, \pm 45, \pm 60 \text{ rev/s}$ の九種類を考えてみましょう。
- ・ ボールの初速度ですが、これも見当がつきませんが、参考文献 2 によると、一般のプレーヤーで毎秒 25 m 程度、トッププレーヤーで毎秒 35 m 程度だそうです。ここでは、 $V_0 = 25, 35 \text{ m/s}$ の二種類を考えてみます。

- ラケットでヒットしたときの飛行方向と地面がなす角度（初期迎え角）は、バックスピンの場合が $\theta_0 = 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ の三種類、トップスピンの場合が $\theta_0 = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ の三種類を考えます。
- ラケットでボールをヒットしたときの高さは大体 90 cm 程度ではないでしょうか。（ $x_0 = 0, y_0 = 0.9 \text{ m}$ ）とします。

3.2 計算結果

3.2.1 初速 25 m/s , バックスピンの場合

一般プレーヤーの初速 25 m/s で、四種類のバックスピン・ボールを打った場合の軌跡を図2に示しました。比較のためにフラットの場合も示しました。打点はバックライン上で、サイドラインに平行に打った場合を考えています。バックスピンは、フラットと比べて遠くまで飛ぶことが分かります。追い込まれたときに、体勢を整える時間を稼ぐには有効かもしれません。しかし、初期迎え角とボールの回転速度をうまく選ばないと、とんでもないホームラン・ボールになってしまいますね。

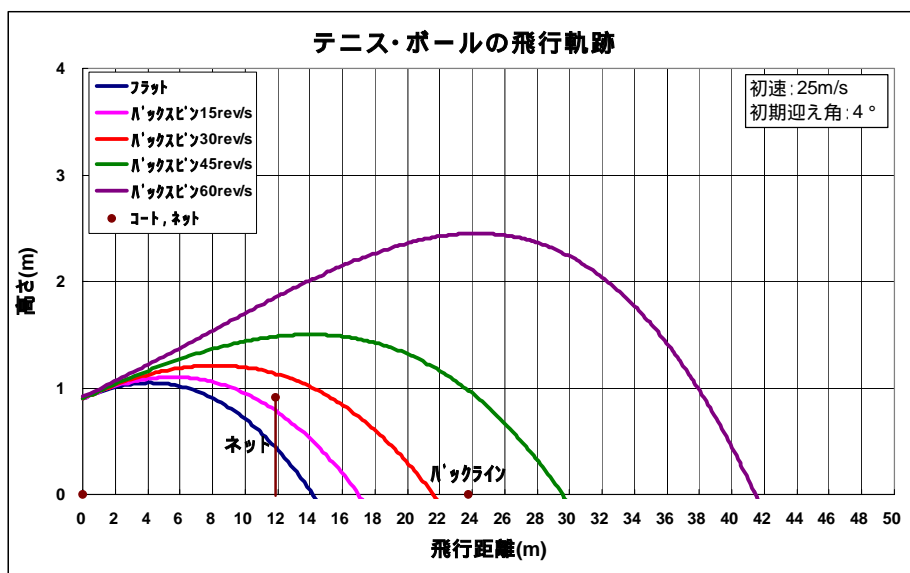


図2-1 バックスピンの場合の軌跡（初速 25 m/s , 初期迎え角 4° の場合）

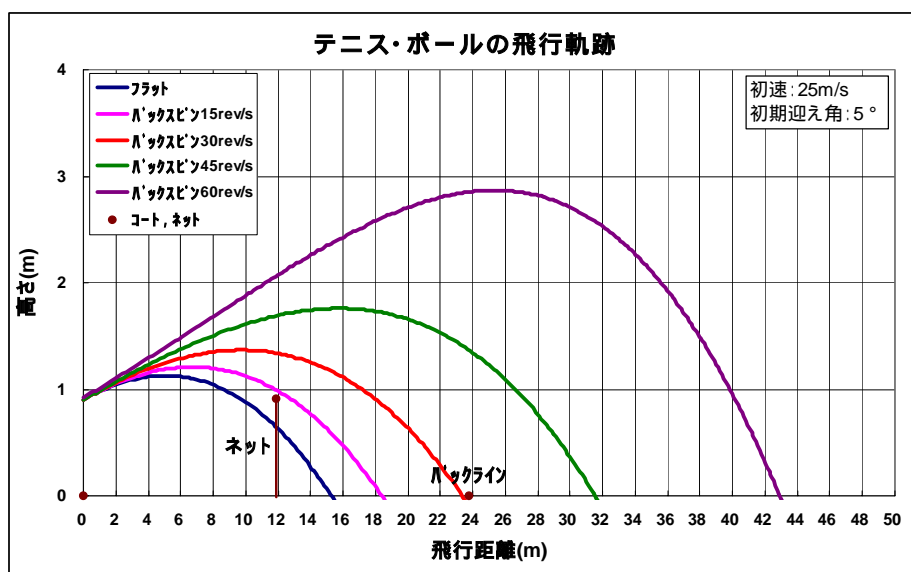


図2-2 バックスピンの場合の軌跡（初速 25 m/s , 初期迎え角 5° の場合）

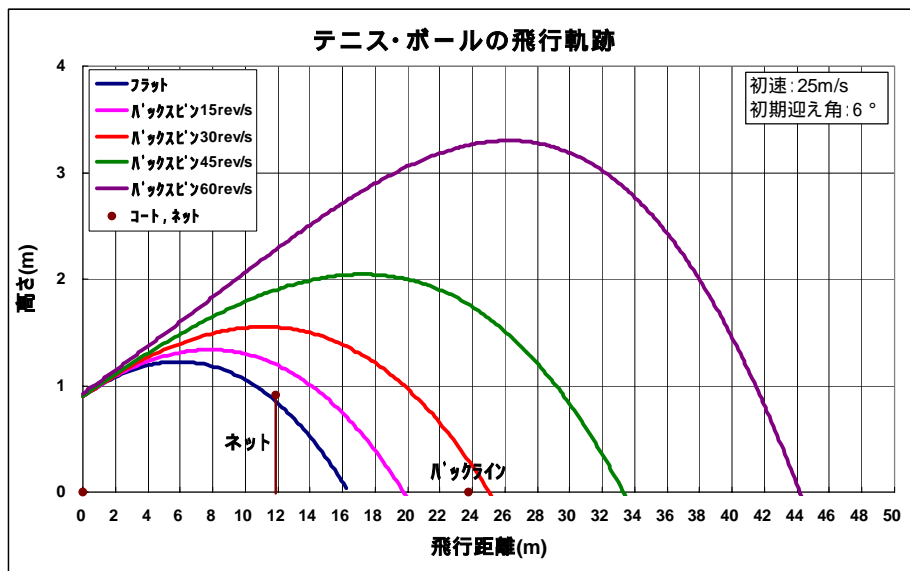


図2-3 バックスピンの場合の軌跡 (初速 25 m/s , 初期迎え角 6° の場合)

3.2.2 初速 25 m/s , トップスピンの場合

一般プレーヤーの初速 25 m/s で、四種類のトップスピン・ボールを打った場合の軌跡を図3 に示しました。比較のためにフラットの場合も示しました。打点はバックライン上で、サイドラインに平行に打った場合を考えています。トップスピンは、フラットと比べてボールが早く落ちることが分かります。初速と初期迎え角が同じでもフラットと比較してトップスピンはアウトし難いことになります。しかし、うまく打たないとネットする危険性もあります。トップスピン・ロブの有効性も分かりますね。

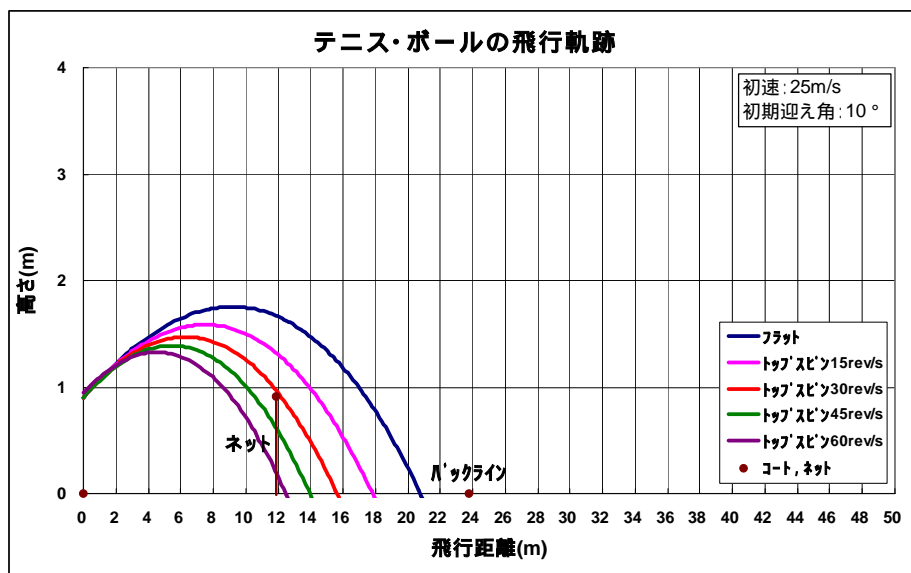


図3-1 トップスピンの場合の軌跡 (初速 25 m/s , 初期迎え角 10° の場合)

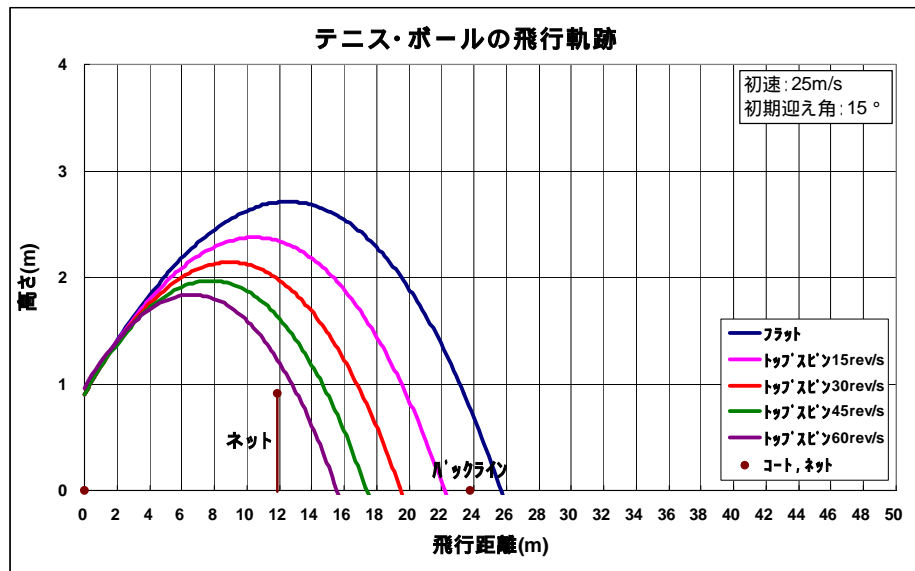


図3-2 トップスピンの場合の軌跡 (初速 25 m/s , 初期迎え角 15° の場合)

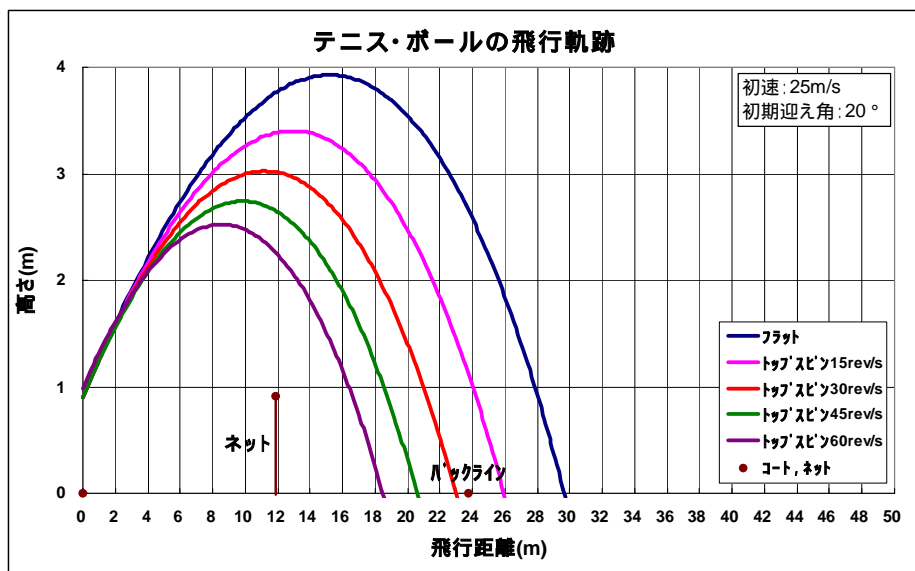


図3-3 トップスピンの場合の軌跡 (初速 25 m/s , 初期迎え角 20° の場合)

3.2.3 初速 35 m/s , バックスピンの場合

トップ・プレーヤーの初速 35 m/s で、四種類のバックスピン・ボールを打った場合の軌跡を図 4 に示しました。比較のためにフラットの場合も示しました。打点はバックライン上で、サイドラインに平行に打った場合を考えています。初速 35 m/s では、初期迎え角が 4° , 5° , 6° のすべてでアウトボールになりました。また、回転速度が大きいと逆放物線を描いて宇宙のかなた(?)に飛んでいくようです。したがって、初期迎え角を 0° , 2° の場合を追加し、4° の場合と並べてみました。初速が速いバックスピンはなかなか難しいようです。

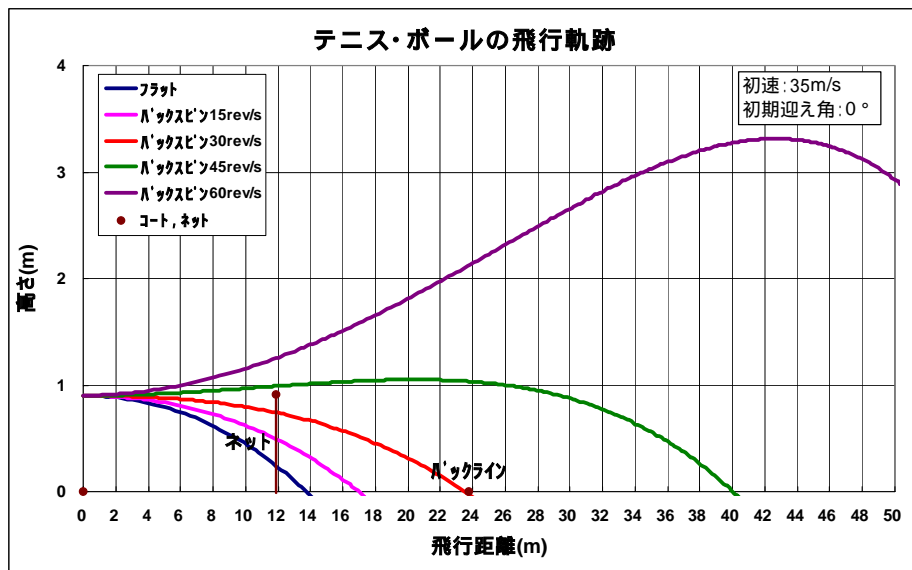


図 4-1 バックスピンの場合の軌跡 (初速 35m/s , 初期迎え角 0° の場合)

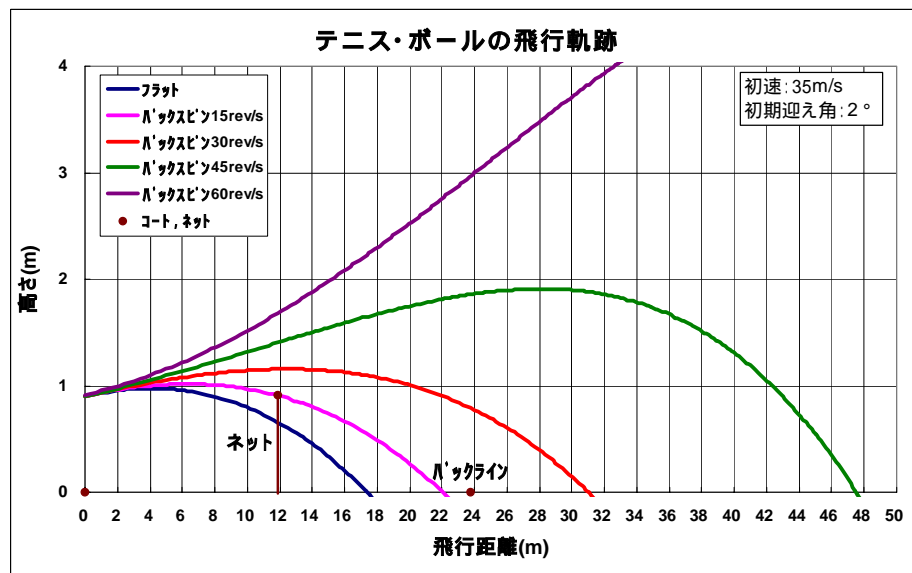


図 4-2 バックスピンの場合の軌跡 (初速 35m/s , 初期迎え角 2° の場合)

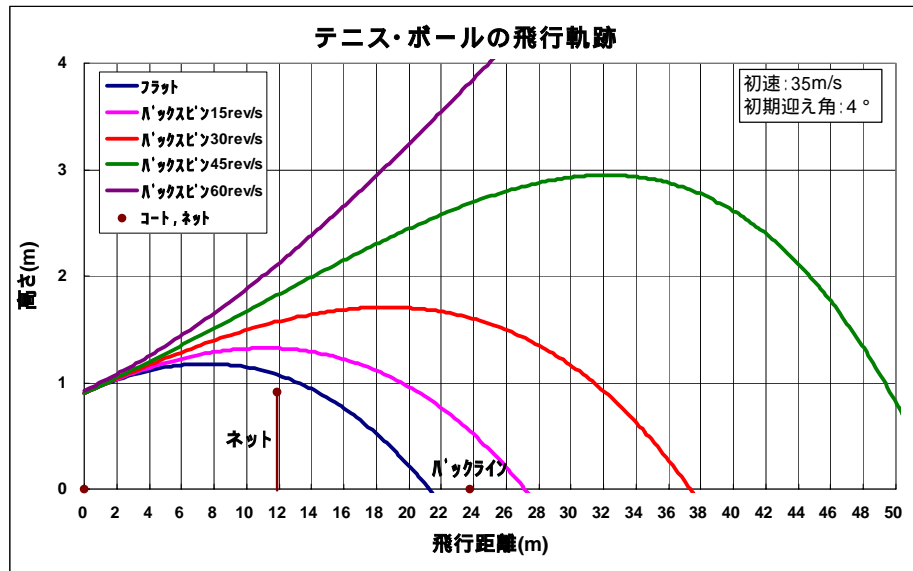


図4-3 バックスピンの場合の軌跡（初速 35m/s，初期迎え角 4° の場合）

3.2.4 初速 35 m/s，トックスピンの場合

トップ・プレーヤーの初速 35 m/s で、四種類のバックスピン・ボールを打った場合の軌跡を図5に示しました。比較のためにフラットの場合も示しました。打点はバックライン上で、サイドラインに平行に打った場合を考えています。初速 35 m/s では、初期迎え角が 10°，15°，20° のほとんどの条件でアウトボールになりました。したがって、初期迎え角を 5°，7.5° の場合を追加し、10° の場合と並べてみました。トックスピン・ロブの有効性がより顕著になりますね。

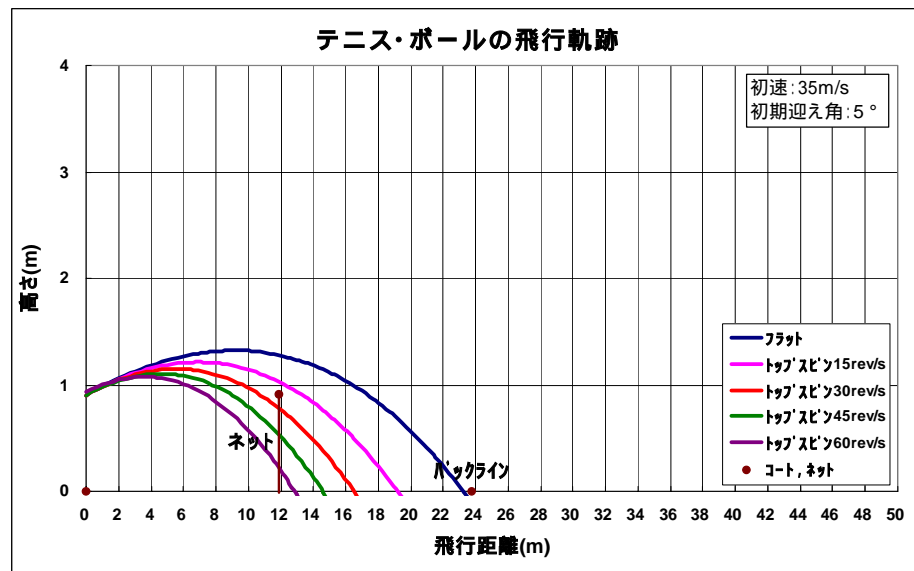


図5-1 トックスピンの場合の軌跡（初速 35m/s，初期迎え角 5° の場合）

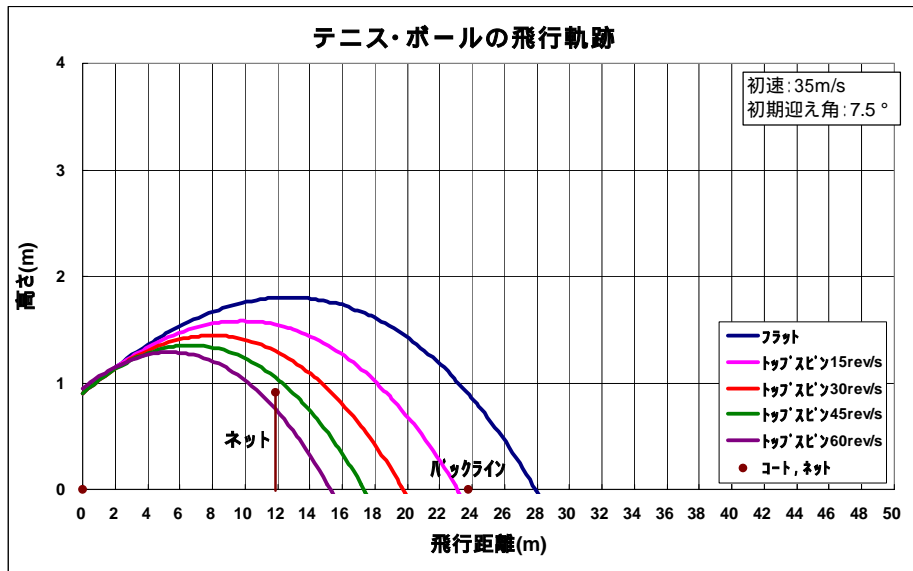


図5-2 トップスピンの場合の軌跡（初速 35m/s，初期迎え角 7.5° の場合）

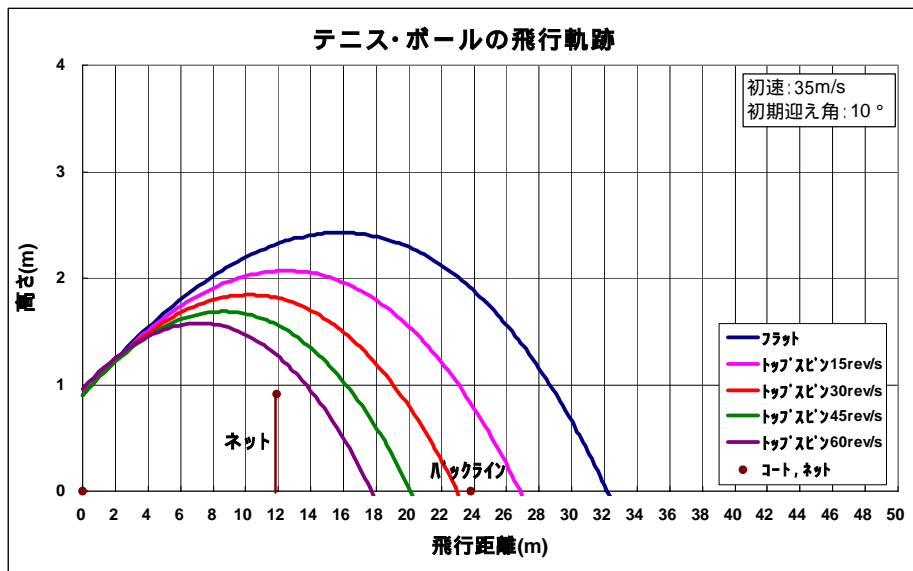


図5-3 トップスピンの場合の軌跡（初速 35m/s，初期迎え角 10° の場合）

【参考文献】

1. 竹中，浦田共著，水力学例題演習，コロナ社
2. 三浦公亮，蝶間林利男著，テニスの科学，光文社

Appendix-1 ルンゲ・クッタ法による連立微分方程式の解法

連立微分方程式が次式で与えられるものとします。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \tag{A-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \tag{A-2}$$

変数の組 (x_n, y_n, z_n) が与えられたとき、四次のルンゲ・クッタ法では、 y_{n+1}, z_{n+1} は次のように与えられます。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \tag{A-3}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4}{6} \tag{A-4}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \Delta x \cdot f(x_n, y_n, z_n) \\ k_2 &= \Delta x \cdot f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\ k_3 &= \Delta x \cdot f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) \\ k_4 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x, y_n + k_3, z_n + l_3) \\ l_1 &= \Delta x \cdot g(x_n, y_n, z_n) \\ l_2 &= \Delta x \cdot g\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\ l_3 &= \Delta x \cdot g\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) \\ l_4 &= \Delta x \cdot g(x_n + \Delta x, y_n + k_3, z_n + l_3) \end{aligned} \right\} \tag{A-5}$$

以上